Cálculo. Tema 1

ETSII- GITI

Ejercicio Propuesto nº 2

Puedes ver el ejercicio resuelto en nuestro canal de YouTube
o entrando en nuestra página web: Academia-M21

Ejercicio 2a

Sea $x \in \mathbb{R}$. Demostrar por inducción las siguientes igualdades;

$$\sin(x)(\sin(x) + \sin(3x) + \cdots + \sin((2n-1)x)) = \sin^2(nx)$$

Solución 1. :

- Comprobamos que se cumple para $n = 1$

$$\sin(x)(\sin(x)) = \sin^2(x)$$

- Supondremos que se cumple para n, y demostremos que entonces se cumple para $n+1$, es decir:

$$\sin(x)(\sin(x) + \sin(3x) + \cdots + \sin((2n-1)x) + \sin((2(n+1)-1)x)) = \sin^2((n+1)x)$$

Como estamos suponiendo que se cumple que

$$\sin(x)(\sin(x) + \sin(3x) + \cdots + \sin((2n+1)x)) = \sin^2(nx)$$

la parte de la izquierda de la primera expresión puede escribirse como

$$\sin^2(nx) + \sin(x)\sin((2n+1)x))$$

recordamos ahora la fórmula del coseno de la suma:

$$\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(B)\sin(A)$$
$$\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(B)\sin(A)$$

sumando ambas tenemos

$$\cos(A-B) - \cos(A+B) = 2\sin(A)\sin(B)$$

y aplicando a

$$\sin(x)\sin((2n+1)x)) = \frac{1}{2}\Big(\cos(2nx) - \cos(2(n+1)x)\Big)$$

u recordando ahora la fórmula de coseno del ángulo mitad

$$\cos(A/2) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(A)}{2}} \Rightarrow \cos^2(A/2) = \frac{1+\cos(A)}{2} \Rightarrow \frac{\cos(A)}{2} = \cos^2(A/2) - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(\cos(2nx) - \cos(2(n+1)x)\Big) = \\
&= \cos^2(nx) - \frac{1}{2} - \cos^2((n+1)x) + \frac{1}{2} = \\
&= \cos^2(nx) - \cos^2((n+1)x)
\end{aligned}$$

y por tanto, juntando todo llegamos a que:

$$\begin{aligned}
&\sin^2(nx) + \sin(x)\sin((2n+1)x)) = \\
&= \sin^2(nx) + \cos^2(nx) - \cos^2((n+1)x) = \\
&= 1 - \cos^2((n+1)x) = \\
&= \sin^2((n+1)x)
\end{aligned}$$

Ejercicio 2b

Sea $x \in \mathbb{R}$. Demostrar por inducción las siguientes igualdades;

$$2\sin(x)(\cos(x) + \cos(3x) + \cdots + \cos((2n-1)x)) = \sin(2nx)$$

Solución 2. :

- Comprobamos que se cumple para $n = 1$

$$2\sin(x)(\cos(x)) = \sin(2x)$$

lo cual es cierto por la fórmula del seno de la suma

$$\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A) \quad \text{si } A = B \quad \Rightarrow \sin(2A) = 2\sin(A)\cos(A)$$

- Supondremos que se cumple para n, y demostremos que entonces se cumple para $n+1$, es decir:

$$2\sin(x)(\cos(x) + \cos(3x) + \cdots + \cos((2n-1)x) + \cos((2(n+1)-1)x) = \sin(2(n+1)x)$$

Como estamos suponiendo que se cumple que

$$2\sin(x)(\cos(x) + \cos(3x) + \cdots + \cos((2n-1)x)) = \sin(2nx)$$

la parte de la izquierda de la primera expresión puede escribirse como

$$\sin(2nx) + 2\sin(x)\cos((2n+1)x))$$

recordamos ahora la fórmula del seno de la suma:

$$\begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin(A)\cos(B) + \sin(B)\cos(A) \\ \sin(A-B) &= \sin(A)\cos(B) - \sin(B)\cos(A) \end{aligned}$$

sumando ambas tenemos que

$$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin(A)\cos(B)$$

y aplicando a

$$\begin{aligned} 2\sin(x)\cos((2n+1)x)) &= \sin(2(n+1)x) + \sin(-2nx) = \\ &= \sin(2(n+1)x) - \sin(2nx) \end{aligned}$$

y por tanto, juntando todo llegamos a que:

$$\begin{aligned} &\sin(2nx) + 2\sin(x)\cos((2n-1)x)) = \\ &= \sin(2nx) + \sin(2(n+1)x) - \sin(2nx) = \\ &= \sin(2(n+1)x) \end{aligned}$$